621. 雑記 VI. 高階常微分方程式

南雲　道夫（阪大）

§ 第 n 階常微分方程式ノ境界値問題

I. 昨年本紙上ニ述ベタモノヲ再ビ茲ニ書クノデアルガ，前ノトキ略シタ証明ハ行列式ノ計算ニヨルモノデアツタガ、

今度ハ行列式ノ計算ニヨラズニ線状微分方程式ノ解ニヨル補間法ノ考ヘニヨリ，モ少シ一般化シタ場合ノ計算ガ極簡単ニ行クコトヲ示シタイ。

例ニヨリ前ノ論文ヲ知ラナクトモヨク解ルヤウニ重複ヲ嫌ハズニ筋道ヲ説明シヤウ。

第 n 階方程式

$$(0)\quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ニ於テ n 個ノ点 $x=\alpha_i,\ y=\beta_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ通ル解ノ存在ヲ研究スル方法トシテ，福原氏ガLagrangeノ補間法ヲ利用スルコトニヨリ，之レヲ聯立一階微分方程式ノ（或ル種ノ）境界値問題ニ変形シ得ルコトヲ述ベラレタ（岩波講座）常微分方程式論131頁）．シカシ福原氏ハコノ方法ヲ適当ナ形ニ利用サレズ、ソノ結果ニモ期待ヲ持タレズニ捨テラレタ（？）ノデアルガ，之レハ次ノヤウニスレバ有効デアルト思フ。

今

$$(1)\quad \varphi_j(x) = \frac{\prod_{\lambda \neq j} (x-\alpha_\lambda)}{\prod_{\lambda \neq j} (\alpha_j - \alpha_\lambda)}$$

ト置ケバ，$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j(x)$ ハLagrangeノ補間法（$n-1$ 次ノ多項式）デアルガ，β_j（常数）ノ代リニ y_j（変数）トオキ

$$
(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} y = \sum_j \varphi_j(x)\, y_j \\ y' = \sum_j \varphi_j'(x)\, y_j \\ \text{-----------------} \\ y^{(n-1)} = \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x)\, y_j \end{cases}
$$

ナル変換ニヨリ，(0) ヲ書キ改メレバ結局

$$
(\mathrm{K}_0) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} y_j = \dfrac{(\alpha_j - x)^{n-1}}{(n-1)!} f\left(x, \sum_i \varphi_i y_i, \cdots\cdots \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. \cdots\cdots, \sum_i \varphi_i^{(n-1)} y_i\right) \\ (j = 1, 2, \cdots\cdots, n) \end{cases}
$$

ナル聯立一階ノ方程式ニ移ル。ソコデコノ方程式ヲバ

$$
y_j(\alpha_j) = \beta_j \qquad (j = 1, \cdots\cdots, n)
$$

ナル條件デ解クコトト元ノ問題ハ同等ニナツタ。（前ノ論文ノ計算ハ結果ガ少シ違ツタヨウデス）。証明ハアトデシマス。

II. 扨テ茲ニ先ヅ問題トスルノハ，変換 (H) ニヨリ (0) カラ (K_0) ヲ導キ出ス証明デアル。コレハ行列式ノ計算カラモ出來ルガ，アマリ簡単デナイ。ソレヨリモ Lagrange ノ補間法（$n-1$ 次ノ Polynom）ヲ拡張シテ，或ル n 階線状微分方程式

$$
L(u) = \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x)\, u = 0
$$

ノ解 $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニヨルモノトシテ (H) ヲ考ヘレバ，(K_0) ノ代リニ（$\varphi_j(\alpha_i)=0$, $i\neq j$. $\varphi_j(\alpha_j)=1$ トス）

$$
(K)\begin{cases}
\dfrac{dy_j}{dx}=\chi(\alpha_j,x)\Big\{f(\;)-\sum_i \varphi_i^{(n)} y_i\Big\} \\[2ex]
f(\;)=f\Big(x,\sum_i \varphi_i y_i,\cdots\cdots,\sum_i \varphi_i^{(n-1)} y_i\Big) \\[2ex]
(j=1,2,\cdots\cdots,n)
\end{cases}
$$

ヲ得ル．但シ $\chi(x,\xi)$ ハ $x=\xi$ ニ於テ

$$\chi(\xi,\xi)=\chi'(\xi,\xi)=\cdots\cdots=\chi^{(n-2)}(\xi,\xi)=0,$$

$$\chi^{(n-1)}(\xi,\xi)=1$$

ナル $L(u)=0$ ノ解（中野氏ノ *Charakteristische Lösung*）デアル。

特ニ $L(u)=\dfrac{d^n u}{dx^n}$ ナル場合ガ丁度 *Lagrange* ノ補間法ノ場合ニ相当シテ，

$$\chi(\alpha_j,x)=\frac{(\alpha_j-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

トナルノデアル。

コヽニ必要ナコトハ $L(u)=0$ ノ積分ニヨリ補間法ガ可能ナルコトデアル。之レハ中野氏ノ所謂 *Volleigentlichkeit* ノ問題デアル。シカシコヽデハ應用上 $L(u)$ ハ $\dfrac{d^n u}{dx^n}$ ノ如ク簡単デ性質ノヨク知レタモノヲ用ヒルコトヲ主眼トシ，$L(u)$ ノ *Volleigentlichkeit* 云々ニハ立チ入ラズニ置

クコトトスル。

III. イヨイヨ証明ニ入ル。先ヅ (H) ニ於テ $\varphi_j(x)$ ハ一次的独立デアルカラ，y_j ノ係数 $\varphi_j(x)$, $\varphi_j'(x)$, ..., $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ ノ作ル行列式（*Wronskian* トナル）ハ 0 ニナラヌ。

今 $y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ ガ順次ニソノ前ノモノヲ微分シタモノナルニヨリ，(H) ト (O) トカラ順次ニ

$$
(H')\quad\begin{cases}
\sum_j \varphi_j(x)\, y_j' = 0 \\
\sum_j \varphi_j'(x)\, y_j' = 0 \\
\text{-----------} \\
\sum_j \varphi_j^{(n-2)}(x)\, y_j' = 0 \\
\sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x)\, y_j' = f(\ ) - \sum_j \varphi_j^{(n)}(x)\, y_j
\end{cases}
$$

ヲ得ル。又逆ニ $y = \sum_j \varphi_j(x)\, y_j$ トオケバ (H') ニヨリ (H) ト (O) トヲ得ル。

次ニ (H') ヲ y_j' ニツイテ解ケバヨイノデアル。所ガ (H') ニ於テ $x = \xi$ トオキ $y_j'(\xi) = c_j$, $u = \sum c_j \varphi_j(x)$ トスレバ，$u(x)$ ハ $L(u) = 0$ ノ解デ (H') ニヨリ

$$u(\xi) = u'(\xi) = \cdots\cdots = u^{(n-2)}(\xi) = 0,$$

$$u^{(n-1)}(\xi) = \left(f - \sum \varphi_j^{(n)} y_j\right)_\xi .$$

故ニ

$$u(x) = \lambda(x, \xi)\left\{f - \sum \varphi_j^{(n)} y_j\right\}_\xi .$$

シカルニ又補間法ニヨリ $u(\alpha_j) = c_j = y_j'(\xi)$. ソコデ

$x=\alpha_j$トシテノ代リニxトカケバ

$$y_j'(x)=\chi(\alpha_j, x)\left\{f-\sum g_j^{(n)}(x)\, y_j\right\} \qquad \text{(証明了)}$$

IV. 以上ノ方法ニ於テハ形式的ナ計算バカリデアルカラ（大小関係ガナイ）変数ハ実数デモ複素数デモヨイ、ノミナラズyノ値ハVektorデモ差支ヘナイ。

(U)ガ(H)ノ変換デ(K)トナッテカラハ，福原氏ノ考ヘニヨリ(K)ヲ積分ノ形ニ書イテ

$$\text{(T)} \quad y_j=\beta_j+\int_{\alpha_j}^{x}\chi(\alpha_j, t)\left\{f(\ )-\sum_i g_i^{(n)} y_i\right\}_t dt.$$

之ニ函数空間ニ於ケル不動点ノ定理ヲ適用スルコトニヨリ解ノ存在定理ガ得ラレル。（岩波講座，常微分方程式論125頁定理27参照．但シ之ニハ一般ノ不動点ノ定理ガ述ベテナク，又ソノ証明モ略シテアル）

不動点ノ定理トハ（有限次元ノ空間ノ場合），有界デ凸ナ閉集合$\mathfrak{M}$ガ連続函数fニヨリ$\mathfrak{M}$ノ部分集合$\mathfrak{N}=f(\mathfrak{M})$ニ写像サレルトキ，写像ノ前後デ一致スル点$F\in\mathfrak{M}$，即チ$F=f(F)$ナル$F$ガ存在スルコトヲ云フ。ソノ証明ハ B. Knaster, C. Kurtowski, S. Mazurkiewicz ノ共同論文 Fundamenta Math. XIV.（132頁—137頁）ニヨルノガ一番好都合デアラウ（位相幾何學ノ門外漢デアル我々ニトッテ）

次ニ上ノ不動点ノ定理ヲバ函数空間（函数ヲ要素トスル集合，ソレニ属スル各要素ヲ点ト呼ブ）或ハ之レヲ抽象化シ

タ線状距離空間＝拡張シテ次ノ定理ガ成立スル。

有界デ凸ナ閉集合 $\mathfrak{M}$ ガ過連続（vollstetig）ナ寫像（運算）f ＝ヨリ $\mathfrak{M}$ ノ部分集合 $\mathfrak{N}=f(\mathfrak{M})$ ＝寫像サレル時 $F=f(F)\in\mathfrak{M}$ ナル点 F ガ存在スル。

但シ過連続トハ空間内ノ任意ノ有界集合ヲバ緊集合（無限部分集合ガ必ズ集積点ヲモツ集合）＝移スヤウナ連続性ヲ云フ。例ヘバ積分ノ如キ運算ハ函数空間＝於ケル過連続ナ運算デアル。

有元次元ノ次元数ヲ増スコト＝ヨリ近似法デ函数空間（或ハ線状距離空間）＝於ケル不動点ノ定理ガ証明出来ル、Studia Math. 2（171頁—180頁）＝於ケル J. Schauder ノ論文参照。尚ホ Tychonoff ノ論文 Math. Annalen 111（767頁—）＝アル証明ハ簡潔（抽象的デアルガ）デアル（帰謬法＝ヨル）。但シ同論文内ノ Anwendung ハ不自然デ感心出來ナイ。

扨テコノ不動点ノ定理ヲコヽ＝適用スレバ

“ $y_i(x)$ ヲバ $a\leq x\leq b$ ＝テ（$a\leq j\leq b$）連続デ

$$|y_i(x)-\beta_i(x)|\leqq\omega_i(x),$$

$$[\beta_i(x),\ \omega_i(x)\text{ ハ連続},\ \beta_i(\alpha_i)=\beta_i]$$

ナル任意ノ函数トスルトキ常＝

$$Z_j(x)=\beta_j+\int_{\alpha_j}^{x}\mathcal{K}(\alpha_j,t)\Big\{f(\ )-\sum_i\varphi_j^{(n)}y_i\Big\}_t\,dt$$

ナル $Z(x)$ ＝ツキテモ

$$|Z_j(x)-\beta_j(x)|\leqq\omega_j(x)$$

ガ成立スレバ，(T)ヲ満足スル $y_j(x)$ ガ存在スル。"

以上ハ抽象スギルケレドモ，$f(\ )$ ノ大サヤ α_i ノ分布等ニ適当ナ制限（不等式ニヨル）ヲツケレバ，容易ニ之レハ成立スル（之レヲ具体的ニ與ヘルコトハ略スルガ。）

只以上ノ不動点ノ定理カラハ解ノ存在（ソノ範囲モ明確ニ限定サレル）ガ結論サレルケレドモ，ソノ一意性ハ少シモ明カニハナラナイ。ソノタメニハ $f(x, y, \cdots\cdots, y^{(n-1)})$ ニツキ更ニ Lipschitz ノ條件ニ類スルモノヲ必要トスル（シカモソレハ不等式ニヨツテ制限サレル！）